

IN112 : Logique mathématique

Examen

Cet examen d'1h15 est composé de 5 exercices indépendants. Le barème indiqué pour chaque exercice l'est à titre indicatif et peut être modifié.

Les seuls documents autorisés pour cet examen sont :

- les notes de cours distribuées en séance
- vos propres notes manuscrites

Les annales des examens des années précédentes sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. L'utilisation d'un ordinateur durant l'examen est interdite.

Il est fortement conseillé de lire complètement un exercice avant d'y répondre.

(3 pt) 1. Sémantique de la logique propositionnelle

Prouver que $((p \rightarrow (r \rightarrow q)) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q))$ est une tautologie :

- en utilisant l'algorithme des tables de vérité
- en mettant la formule sous forme normale conjonctive

(3 pt) 2. Système de Gentzen pour la logique propositionnelle

En utilisant le système des séquents de Gentzen, montrer que la formule $(p \wedge q \rightarrow r \vee s) \rightarrow (\neg s \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r))$ est valide.

(4 pt) 3. Résolution pour la logique propositionnelle

Soit le raisonnement suivant :

Si je vais en cours de logique demain matin alors je dois me lever tôt demain matin et si je vais en soirée ce soir alors je me coucherais tard ce soir. Si je me couche tard et que je me lève tôt alors je passerai la journée avec seulement cinq heures de sommeil. Après seulement cinq heures de sommeil je dois faire la sieste pendant le cours de logique. Donc je n'irai pas en cours de logique demain matin ou je n'irai pas en soirée ce soir ou je ferai la sieste pendant le cours de logique.

- (a) modéliser ce raisonnement en utilisant un langage propositionnel.
- (b) en utilisant le système formel Résolution, montrer que le raisonnement précédent est correct.

(6 pt) 4. Résolution pour la logique du premier ordre

On considère un langage du premier ordre dans lequel

- il n'y a pas de symboles de fonction
- P , Q et R sont les seuls symboles de prédicats

On considère l'ensemble de formules bien formées Σ contenant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y (P(y, x) \wedge \forall z (Q(z, y) \rightarrow P(z, x))) \\ &\forall x (\neg R(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge Q(y, x))) \end{aligned}$$

En utilisant le principe de Résolution pour la logique du premier ordre, montrer que $\Sigma \models \forall x \exists y (P(y, x) \wedge R(y))$.

(4 pt) 5. Programmation logique avec Prolog

On cherche ici à écrire des prédicats permettant de travailler avec des listes.

- (a) écrire un prédicat `count/2` permettant de compter le nombre d'éléments d'une liste.
- (b) écrire un prédicat `compress/2` qui élimine les occurrences successives d'un même symbole dans une liste. Par exemple, `compress([a, a, a, b, b, c], [a, b, c])` sera vrai.
- (c) écrire un prédicat `pack/2` qui sépare les occurrences successives d'un même symbole dans une liste dans des listes séparées. Par exemple, `compress([a, a, a, b, b, c], [[a, a, a], [b, b, b], [c]])` sera vrai.

Pour cela, on écrira d'abord un prédicat `transfer/4` dont la signification est la suivante :

`transfer(X, X1, Y1, Z)` est vrai si `Y1` est la liste restant à traiter à partir de `X1` quand toutes les occurrences de `X` en tête de `X1` ont été placées dans `Z`.

License CC BY-NC-SA 3.0

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported license (CC BY-NC-SA 3.0)

You are free to Share (copy, distribute and transmit) and to Remix (adapt) this work under the following conditions:

-  **Attribution** – You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
-  **Noncommercial** – You may not use this work for commercial purposes.
-  **Share Alike** – If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

See <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> for more details.