IN112 : Logique mathématique

Examen

Cet examen d'1h15 est composé de ?? exercices indépendants. Le barême indiqué pour chaque exercice l'est à titre indicatif et peut être modifié.
Les seuls documents autorisés pour cet examen sont :
- les notes de cours distribuées en séance
- vos propres notes manuscrites

Les annales des examens des années précédentes sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. L'utilisation d'un ordinateur durant l'examen est interdite.
Il est fortement conseillé de lire complétement un exercice avant d'y répondre.

(4 pt) **1. Sémantique de la logique propositionnelle**

Un roi du moyen-âge veut vider ses prisons. Il soumet donc chacun de ses prisonniers à une épreuve. Chaque jour, un prisonnier doit choisir entre deux cellules. Il y une princesse ou un tigre dans chaque cellule, mais pas les deux à la fois (sinon la princesse se ferait dévorer par le tigre). Il peut donc y avoir deux tigres, deux princesses ou bien un tigre et une princesse dans les cellules. Si le prisonnier choisit une cellule où il y a une princesse, il peut l'épouser, s'il tombe sur le tigre, il se fait dévorer.

Pour aider le prisonnier, il y a des inscriptions sur chaque cellule (elles peuvent être fausses) et une indication donnée par le roi (qui est toujours vraie).

On considère un langage propositionnel contenant deux variables p_1 et p_2 signifiant respectivement « il y a une princesse dans la première cellule » et « il y a une princesse dans la deuxième cellule ».

Nous proposons dans ce qui suit les inscriptions et indications données pour les deux premiers jours. Pour chaque situation, représenter la situation en utilisant p_1 et p_2 et indiquez la cellule à choisir. Vous justifierez votre réponse en utilisant une table de vérité.

1. sur la porte de la première cellule, on lit l'inscription « il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre ». Sur la porte de la deuxième cellule, on lit l'inscription « il y a une princesse dans une cellule et un tigre dans l'autre ». Le roi précise que l'une des inscriptions est vraie et l'autre fausse.
2. sur la porte de la première cellule, on lit l'inscription « au moins une des cellules contient une princesse ». Sur la porte de la deuxième cellule, on lit l'inscription « il y a un tigre dans l'autre cellule ». Le roi précise que soit les deux inscriptions sont vraies, soit elles sont toutes les deux fausses.

(3 pt) **2. Système de Gentzen pour la logique propositionnelle**

En utilisant le système des séquents de Gentzen, montrer que la formule $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to \neg q \wedge r)$ n'est pas valide et proposer une interprétation propositionnelle qui ne la satisfait pas.

(5 pt) **3. Résolution pour la logique propositionnelle**

Il a trois suspects pour un meurtre : Adams, Brown et Clark. Évidemment, tous les suspects disent qu'ils sont innocents.

1. Adams dit : « je ne l'ai pas tuée. La victime était une vieille connaissance de Brown. Mais Clark le haïssait »
2. Brown dit : « je ne l'ai pas tuée. Je ne connaissais pas la victime. De plus, j'étais en dehors de la ville toute la semaine »
3. Clark dit : « je ne l'ai pas tuée. J'ai vu Adams et Brown en ville avec la victime ce jour-là. Un des deux a dû la tuer »

On suppose qu'il n'y a qu'un seul meurtrier, que celui-ci ment et que les deux innocents disent la vérité.

1. proposer un langage propositionnel $\mathcal{L}_{PL}$ permettant de modéliser les assertions précédentes et modéliser les. On n'oubliera pas de modéliser des connaissances comme « si X était avec la victime le jour du meurtre, alors il était en ville » et on conditionnera les affirmations de chaque suspect par le fait qu'il est innocent (par exemple, les affirmations d'Adams sont vraies si Adam est innocent).
2. en utilisant Résolution pour $\mathcal{L}_{PL}$, montrer que Brown est le coupable.

(8 pt) **4. Résolution pour la logique du premier ordre**

On considère un langage du premier ordre dans lequel

– f et g sont les seuls symboles de fonctions
– P, Q, R et S sont les seuls symboles de prédicats

On considère l'ensemble de formules bien formées Σ contenant les formules suivantes :

$$\begin{array}{l} \forall x\ \neg S(f(x)) \\ \forall y \forall z\ (P(z) \to (S(y) \vee Q(y,z))) \\ \exists x \exists y\ R(x,y) \\ \forall x \forall y\ (R(x,y) \to P(g(x, f(y)))) \end{array}$$

En utilisant le principe de Résolution pour la logique du premier ordre, montrer que $\Sigma \models \exists x \exists y \exists z\, Q(y, g(z, f(x)))$.

(5 pt) **5. Programmation logique avec Prolog**

On cherche ici à écrire des prédicats permettant de travailler avec des listes.

(a) écrire un prédicat `count/2` permettant de compter le nombre d'éléments d'une liste.

(b) écrire un prédicat `my_last_but_one/2` permettant de trouver l'avant-dernier élément d'une liste.

(c) écrire un prédicat `element_at/3` permettant de trouver le n-ième élément d'une liste (`element_at(X, [a,b,c,d], 3)` permet de trouver le troisième élément de la liste `[a,b,c,d]`).

(d) écrire un prédicat `palindrome/1` permettant de savoir si une liste est un palindrome (la liste peut se lire dans les deux sens de la même façon).